SOLVING BELTRAMI EQUATIONS BY CIRCLE PACKING

大竹, 博巳

数理解析研究所講究録
第 893 巻 1995 年 150-159

SOLVING BELTRAMI EQUATIONS BY CIRCLE PACKING

京都教育大学　大竹 博巳　(Hiromi Ohtake)

はじめに

本稿は Zheng-Xu He 著の上記の表題の論文 [1] の紹介である．この論文では $\mathbb{C}$ 内の有界 Jordan 領域 Ω, Ω 内の異なる二点 z_0, z_0' および Ω 上の Beltrami 係数 λ, 即ち

$$\|\lambda\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\Omega} |\lambda(z)| < 1$$

を満たす可測函数 $\lambda\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して, circle packing の方法を利用して Beltrami 方程式：

$$(1)\qquad \begin{gathered} f_{\bar{z}}(z) = \lambda(z) f_z(z) \qquad \text{a.e. } z \in \Omega \\ f(z_0) = 0, \qquad f(z_0') \in (0,1) \end{gathered}$$

の解である擬等角写像 $f\colon \Omega \to \mathbb{D} := \{|z| < 1\}$ の近似を構成することを議論している．$f(z_0) = 0$, $f(z_0') \in (0,1)$ を求めることを議論している．なお, 原論文では $\mathbb{C}$ 内の有界 Jordan 領域の場合だけでなく, 閉 Riemann 面内の領域でその境界が Jordan 閉曲線の有限和になっているようなものについても議論しているが本稿では省略させて頂く．

本稿についの予備知識として

- Koebe-Andreev-Thurston の定理
- Ring Lemma
- Length-Area Lemma
- Hexagonal Packing Lemma
- および以上を利用して circle packing から Riemann 写像を構成する方法
- 擬等角写像の一般論

を仮定し, ここで改めて主張まで述べることはしないものとする. これらの内の circle packing までの内容については [3], [5] やこの講究録の他の解説等を, 一方擬等角写像については Lehto-Virtanen の本 [2] 等を参考にして頂きたい. また原論文にある図を参照して頂きたいので, 手元に原論文があることも仮定して述べて行くこことする.

$\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$, とする. 複素変形率 (complex dilatation) が α であるような (向きを保つ) Affine 写像によって三角形 $\triangle$ が正三角形にうつるとき, $\triangle$ の複素変形率は α であるという. また短く $\triangle$ は α-三角形であるともいう. $\triangle$ の相似三角形はすべて同じ複素変形率を持っている.

先ず次の簡単な例を考察してみよう.

例. $\varepsilon > 0$ は十分小とし, 直径が ε 以下であるような α-三角形とこれを $180°$ 回転させた三角形を張り合わせて得られる $\mathbb{C}$ の三角形分割を $T_{\mathbb{C}}$ とする. ここで circle packing を用いて Ω から単位円板 $\mathbb{D}$ への等角写像を構成した方法を思い出してもらおう. そしてその際に regular hexagonal packing の脈体 (nerve) — これは $\alpha = 0$ の場合の $T_{\mathbb{C}}$ である— を用いた代りに $T_{\mathbb{C}}$ を使って, Ω を内から近似する三角形分割 T_ε と, 脈体が T_ε と同型であるような $\mathbb{D}$ の Andreev packing P_ε および自然な PL-写像 $f_\varepsilon\colon |T_\varepsilon| \to |P_\varepsilon|$ を構成し, 同じ議論を行うと, $\varepsilon \to 0$ の極限写像 $f := \lim f_\varepsilon\colon \Omega \to \mathbb{D}$ は α を複素変形率とする擬等角写像になる. なぜならば A を複素変形率が α であるような Affine 写像としたとき, $A(T_{\mathbb{C}})$ は regular hexagonal packing の脈体になっているので, $f_\varepsilon \circ A^{-1}$ の極限 $f \circ A^{-1}$ が $A(\Omega)$ から $\mathbb{D}$ の上への等角写像になるからである.

上記の例において T_ε と $A(T_\varepsilon)$ は同型であるから, 対応する $\mathbb{D}$ 内の Andreev packing も同型である. それにもかかわらず極限写像が擬等角写像になったのは, α-三角形が正三角形と見なせるような計量を Ω に入れたからであると理由付けることができる. 一般に Ω 上の Beltrami 係数 λ が与えられたとき, Ω 上の計量を Euclid 計量から $ds := |dz + \lambda(z)d\bar{z}|$ に取り替えると, 中への等角写像 $(\Omega, ds) \to (\mathbb{C}, |dz|)$ が $(\Omega, |dz|)$ に関しては λ を複素変形率とする擬等角写像になる.

詰まる所, Ω 上の Beltrami 係数 λ に対して, $|T|$ が Ω を近似しているよう

な三角形分割 T を構成し, T の元である各三角形 $\triangle$ 上において $\triangle$ の複素変形率に等しいとして定めた区分的に定数であるような Beltrami 係数が λ を近似するようにできたならば, circle packing を利用して Beltrami 方程式が解けたことになるであろう. 以降の節で He の原論文に従ってそのような T を構成し, T に対応する PL-写像が実際 Beltrami 方程式の近似解になっていることを確かめて行こう.

近似解の構成

Ω を有界 Jordan 領域とし, z_0, $z_0' \in \Omega$ を固定する. $\delta > 0$ を十分小として, $Q_0 := \{x+iy\colon 0 \le x \le \delta,\ 0 \le y \le \sqrt{3}\delta/2\}$ の平行移動図形 $Q := Q_0 + j\delta + k(1+\sqrt{3}i)\delta/2$ ($j, k \in \mathbb{Z}$) 全体により平面 $\mathbb{C}$ を埋め尽くす. $\overline{\Omega} \cap Q \neq \emptyset$ となるようなすべての Q を含む最小の Jordan 閉領域を $\overline{\Omega}_\delta$, その内部を Ω_δ とし, $Q \subset \Omega$ となるすべての Q の和集合を $\widetilde{\Omega}_\delta$ で表わす. (原論文図 1 参照)

$$\lim_{\delta \to 0} \operatorname{Area}(\Omega \setminus \widetilde{\Omega}_\delta) = 0 \tag{2}$$

は明らかであり, Ω が Jordan 領域であることから

$$\Omega = \ker_{\delta \to 0} \overline{\Omega}_\delta := \bigcup_{\delta > 0} \operatorname{int}\Bigl(\bigcap_{0 < \varepsilon \le \delta} \overline{\Omega}_\varepsilon\Bigr)$$

がわかる.

Ω 上の Beltrami 係数 λ に対して

$$\lambda(Q) := \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{Area}(Q)} \displaystyle\iint_Q \lambda(z)\, dx\, dy, & Q \subset \widetilde{\Omega}_\delta \text{ の場合} \\ 0, & \text{他の場合} \end{cases}$$

とし, λ の近似可測函数 $\lambda_\delta\colon \Omega \to \mathbb{C}$ を

$$\lambda_\delta|_{Q \cap \Omega} = \lambda(Q)$$

で定める. このとき

補題 1. $\|\lambda_\delta\|_\infty \leq \|\lambda\|_\infty$ かつ

$$\lim_{\delta\to 0}\iint_\Omega |\lambda_\delta(z)-\lambda(z)|\,dx\,dy = 0.$$

証明: 前半の主張は定義から明らかである.

一般に $h \in L^1(\Omega)$ に対して, 上記のようにして h_δ を作ったとき, 対応 $h \mapsto h_\delta$ は線型であって, $\|h_\delta\|_1 \leq \|h\|_1$ も成り立つ. さて $\varepsilon > 0$ とし, $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ を $\|\lambda - \omega\|_1 < \varepsilon$ となるようとる. ω は一様連続だから, $\delta > 0$ を十分小さく取ると $|z-w| \leq \sqrt{7}\delta/2 = \mathrm{diam}\,(Q)$ ならば $|\omega(z)-\omega(w)| \leq \varepsilon$ となる. ほとんどすべての $z \in \widetilde{\Omega}_\delta$ において, z を含んでいるような Q をとると

$$\begin{aligned}|\omega(z)-\omega_\delta(z)| &= |\omega(z)-\omega(Q)|\\ &= \frac{1}{\mathrm{Area}\,(Q)}\Big|\iint_Q \omega(z)-\omega(w)\,du\,dv\Big| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

そこで

$$\|\omega-\omega_\delta\|_1 \leq \varepsilon\mathrm{Area}\,(\widetilde{\Omega}_\delta) + \|\omega\|_\infty \mathrm{Area}\,(\Omega \setminus \widetilde{\Omega}_\delta).$$

故に

$$\begin{aligned}\|\lambda-\lambda_\delta\|_1 &\leq \|\lambda-\omega\|_1 + \|\omega-\omega_\delta\|_1 + \|\omega_\delta - \lambda_\delta\|_1\\ &\leq 2\|\lambda-\omega\|_1 + \|\omega-\omega_\delta\|_1\\ &\leq (2+\mathrm{Area}\,(\Omega))\varepsilon + \|\omega\|_\infty\mathrm{Area}\,(\Omega\setminus\widetilde{\Omega}_\delta).\end{aligned}$$

(2) と合わせて後半の主張を得る. □

各 $Q \subset \widetilde{\Omega}_\delta$ に対して, その左下, 右下, 右上, 左上の頂点をそれぞれ z_1, z_2, z_3 および z_4 とし, Affine 写像 $\Psi_Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$\psi_Q(z) := \frac{1+\overline{\lambda(Q)}}{1-|\lambda(Q)|^2}(z - z_1 + \lambda(Q)(\overline{z}-\overline{z}_1))$$

で定める. ψ_Q は $\lambda(Q)$ を複素歪曲率とする擬等角写像であり, Q を

$$\begin{aligned}z_1' &:= \psi_Q(z_1) = 0,\\ z_2' &:= \psi_Q(z_2) = x_2,\\ z_3' &:= \psi_Q(z_3) = x_1 + x_2 + (\sqrt{3}\delta/2)i,\\ z_4' &:= \psi_Q(z_4) = x_1 + (\sqrt{3}\delta/2)i\end{aligned}$$

を四頂点とする平行四辺形 Q' に写像する. ここに

$$x_1 := \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{Im}\,\lambda(Q)}{1-|\lambda(Q)|^2}\delta, \qquad x_2 := \frac{|1+\lambda(Q)|^2}{1-|\lambda(Q)|^2}\delta$$

である. (原論文図 2 参照)

$n = n_\delta := (2[1/\delta])^2$ と定め, H_δ を一辺の長さが δ/n の正三角形による $\mathbb{C}$ の三角形分割で

- 原点 0 は H_δ の頂点のひとつ
- 0 を頂点に持ち, 実軸に含まれているような辺が存在する

ようなものとする. (原論文図 3 参照)

さて H_δ の三角形のうち Q' 内にあり, $\partial Q'$ と $\delta/2n$ 以上離れているものからできる単体複体を $H(Q')$ とする. $|H(Q')|$ は Jordan 閉領域になっている. (原論文図 4 参照)

以下 $C_1, C_2, \cdots$ は $\|\lambda\|_\infty$ のみによって定まる正定数を表わすものとする. z_1'', z_2'' をそれぞれ $|H(Q')|$ の最下辺の左端, 右端, z_3'', z_4'' をそれぞれ $|H(Q')|$ の最上辺の右端, 左端とする. 線分 $z_j'z_j''$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ の長さはすべて $\delta/2n$ 以上であるがさらに,

$$|x_1/(\sqrt{3}\delta/2)| \le C_1 \quad \text{かつ} \quad \{z \in Q' \colon \mathrm{dist}(z, \partial Q') \ge 3\delta/2n\} \subset |H(Q')|$$

より, $C_2\delta/n$ 以下となる. $Q' \setminus |H(Q')|$ を四つの線分 $z_j'z_j''$ で切って四つの閉集合に分ける. このうち台形 $z_1'z_2'z_2''z_1''$ を R_{12} とし, ここから反時計回りに R_{23}, R_{34}, R_{41} と名付ける. (原論文図 5 参照) これらの図形を三角形分割しよう. 先ず台形 R_{12} においては次のように行う. 辺 $z_1'z_2'$ は n 等分して, n 個の辺に分ける. 一方, 辺 $z_1''z_2''$ は長さ δ/n の辺の和集合になっている. これらの頂点の内 z_1', z_2', z_2'', z_1'' 以外の各頂点 v から対辺上にある最も近い位置にある頂点 v' をとり, 線分 vv' を三角形分割の辺であるようにする. この操作だけではまだ四角形が残る可能性があり, R_{12} の三角形分割ができたとは限らないが, 残った四角形については短い方の対角線を辺に加えることにより R_{12} の三角形分割が得られる. ここでこの三角形分割によりできた辺の長さが $\delta/2n$ 以上, $C_3\delta/n$ 以下であることを注意しておく. まったく同じ方法により R_{34} の三角形分割が得られる. 次に R_{23} の三角形分割を行う. 先ず直線 $\{z \colon \mathrm{Im}\, z = \sqrt{3}j\delta/2n\}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$

で R_{23} を切り, 2 個の三角形と $(n-2)$ 個の台形に分ける. 台形の四頂点を除いた周上に $H(Q')$ の頂点が存在していない場合には短い方の対角線を三角形分割の辺に加え, 頂点 v が存在している場合には対辺の端点の内で v に近い方と v を結ぶ線分を辺に加えて, $H(Q')$ の頂点が存在していない場合に帰着させる. これで R_{23} の三角形分割が得られた. R_{41} の三角形分割についても同様に行う.

$H(Q')$, R_{12}, R_{23}, R_{34}, R_{41} の三角形分割を合わせて Q' の三角形分割 $T(Q')$ をつくり, Q の三角形分割 $T(Q)$ を $T(Q) := \Psi_Q^{-1}(T(Q'))$ で定める. これらの三角形分割を張り合わせることにより, $\widetilde{\Omega}_\delta$ の三角形分割が得られる. さらに $Q \subset \overline{\Omega}_\delta \setminus \mathrm{int}\widetilde{\Omega}_\delta$ に対しては, Q 内の H_δ の辺, 頂点と ∂Q により三角形分割を行い, 以上を合わせて $\overline{\Omega}_\delta$ の三角形分割 T_δ を得る. 構成方法から次の補題がわかる.

補題 2. T_δ の各辺の長さは $C_4\delta/n$ 以上 $C_5\delta/n$ 以下である. 特に, T_δ は δ に依らず一様に有界次数である.

一般に単体複体 T の頂点 v と非負整数 m に対して, T の部分複体 $G(T,v,m)$ を

- $G(T,v,0) := \{v\}$,
- $G(T,v,m+1)$ は $G(T,v,m)$ の少なくともひとつの頂点を含む T の辺単体の集合

により帰納的に定める.

T_δ は以下の性質も持っている.

補題 3. (i) 境界 $\partial|T_\delta|$ 上にある頂点 v に対して, $G(T_\delta,v,n-1)$ の各頂点は T_δ の高々六つの辺の端点になっていて, $G(T_\delta,v,n-1)$ の各辺の長さは δ/n 以下である.

(ii) $0 \le m \ll n$, $Q \subset \widetilde{\Omega}_\delta$ とする. $H(Q)$ の三角形 $\triangle$ で, その各頂点 v に対して $G(T_\delta,v,m) \subset H(Q)$ が成立するような $\triangle$ およびその辺単体の成す $T(Q)$ の部分複体を $I_m(Q)$ とすると

$$\mathrm{Area}\,(Q \setminus |I_m(Q)|) \le C_6\frac{m}{n}\mathrm{Area}\,(Q)$$

が成立する.

証明: (i) : $v \in Q$ となる Q は $\widetilde{\Omega}_\delta$ に含まれないので, T_δ の作り方から従う.

(ii) : $H(Q')$ に属する三角形 $\triangle$ の直径は δ/n であるので, $\triangle$ の三頂点と $\partial Q'$ の距離がすべて $m\delta/n + \delta/2n$ 以上であるならば $\triangle \in I_m(Q') := \Psi_Q(I_m(Q))$ となる. そこで $\partial Q'$ からの距離が $(m+1)\delta/n + \delta/2n$ 以上であるような Q' 内の点はすべて $|I_m(Q')|$ に含まれる. よって

$$\frac{\mathrm{Area}\,(Q' \setminus |I_m(Q')|)}{\mathrm{Area}\,(Q')} \leq C_6 \frac{m}{n}.$$

Ψ_Q は Affine 写像であるから面積比を変えないので, 主張が成立する. □

Koebe-Andreev-Thurston の定理により, Jordan 領域 $\overline{\Omega}_\delta$ の三角形分割 T_δ に対して $\mathbb{D}$ 上の circle packing P_δ で, 各 border circle が単位円周 $\partial\mathbb{D}$ に内接しかつ, 脈体が T_δ と同型であるようなものが存在する. P_δ は $\mathbb{D}$ の Möbius 変換でうつり合うものを同一視すれば一意的である.

T_δ の頂点を, 対応する P_δ の circle の中心にうつす写像を, T_δ の各単体上では Affine 変換になっているようにして $|T_\delta|$ に拡張した中への PL-写像 : $|T_\delta| = \overline{\Omega}_\delta \to \mathbb{D}$ を g_δ で表わすものとする. 但し, g_δ は $g_\delta(z_0) = 0$, $g_\delta(z_0') \in (0,1)$ を満たすように正規化しておく. そして最後に, $f_\delta := g_\delta|_\Omega$ により写像 $f_\delta \colon \Omega \to \mathbb{D}$ を定める. 次節では, 以上のようにして定義した f_δ が Beltrami 方程式の近似解であること, 即ち $\lim_{\delta\to 0} f_\delta$ が解であることを示そう.

近似解の収束

前節で構成した f_δ について次の主定理が成り立つ.

定理 1. $\delta \to 0$ のとき, f_δ はある擬等角写像 $f \colon \Omega \to \mathbb{D}$ に Ω 上で広義一様収束し, 極限写像 f は Beltrami 方程式 (1) の解である.

この主定理は通常の議論により次の定理から導くことができる.

定理 2. 0 に収束している任意の正数列 $\{\delta(k)\}_{k=0}^{\infty}$ に対して, 擬等角写像の列 $\{f_{\delta(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ は Beltrami 方程式 (1) の解であるような擬等角写像 $f \colon \Omega \to D$ に広義一様収束する部分列を含む.

証明: 補題 2 より P_δ の脈体の成すグラフの次数は (δ に依らず) 一様に有界である. よって Ring Lemma より互いに外接している P_δ の円の半径比は上下共に一様に有界になるので, PL-写像 g_δ も一様に C_7-擬等角写像になる. 一方補題 3 (i) と Length-Area Lemma により P_δ の border circle の半径は $\delta \to 0$ のとき一様に 0 に収束するので, $\ker g_\delta(\Omega_\delta) = \mathbb{D}$ となる.

さて $\{f_{\delta(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ は正規族を成す ([2] 定理 II.5.1) から, 部分列を選んだとして Ω 上で広義一様収束しているとして良い. その極限写像を f とすると, 次の主張が成立する.

補題 4. f は Ω から $\mathbb{D}$ への C_7-擬等角写像である.

証明: f が C_7-擬等角写像でないとする. [2] 定理 II.5.3 より $\#f(\Omega) = 1, 2$ となるが, f は連続であるから後者は起こり得ない. 一方前者の場合 $f_{\delta(k)}$ は定数函数 0 に広義一様収束しているので, Ω 内の閉円板 Δ をひとつとると, 二重連結領域 $\Omega_{\delta(k)} \setminus \Delta$ のモジュラスは有界であるが, $g_{\delta(k)}$ による像 $g_{\delta(k)}(\Omega_{\delta(k)} \setminus \Delta) = g_{\delta(k)}(\Omega_{\delta(k)}) \setminus f_{\delta(k)}(\Delta)$ のモジュラスは非有界になり, 擬等角写像でモジュラスが擬不変であること ([2] 定理 I.7.1) に反する. よって, f は C_7-擬等角写像である.

次に, 等角写像 $\phi_k \colon \mathbb{D} \to \Omega_{\delta(k)}$, $\phi_k(0) = z_0$, $\phi_k^{-1}(z_0') \in (0,1)$, $\phi \colon \mathbb{D} \to \Omega$, $\phi(0) = z_0$, $\phi^{-1}(z_0') \in (0,1)$ をとる.

$$\Omega = \ker_{k\to\infty} \Omega_{\delta(k)} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{int}(\bigcap_{j \geq k} \Omega_{\delta(j)})$$

であるから Carathéodory kernel theorem ([4] 定理 1.1.8) により ϕ_k は ϕ に広義一様収束する. 部分列を選ぶことにより, 中への C_7-擬等角写像列 $g_{\delta(k)} \circ \phi_k \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $g_{\delta(k)} \circ \phi_k(0) = 0$, も広義一様収束しているとして良い. このとき $\lim g_{\delta(k)} \circ \phi_k = f \circ \phi$ となるので, 再び Carathéodory の定理より $f(\Omega) = f \circ \phi(\mathbb{D}) = \ker g_{\delta(k)} \circ \phi_k(\mathbb{D}) = \ker g_{\delta(k)}(\Omega_{\delta(k)}) = \mathbb{D}$ を得る. □

定理 2 の証明を続けよう. 残っているのは, f の複素変形率 $\mu(f)$ が λ の等しいことを示すことのみである. そのためには, [2] 定理 IV.5.2 より, 更に部分列を選んだとして

$$\lim_{k\to\infty} \mu(f_{\delta(k)})(z) = \lambda(z) \qquad \text{a.e. } z \in \Omega$$

を示せば良いが, これには補題 1 より

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{\Omega}|\mu(f_{\delta(k)})-\lambda_{\delta(k)}|\,dx\,dy=0 \tag{3}$$

を示せば十分である.

先ず, 補題 1 と式 (2) より

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\iint_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}_{\delta(k)}}&|\mu(f_{\delta(k)})-\lambda_{\delta(k)}|\,dx\,dy\\ &\le 2\lim_{k\to\infty}\mathrm{Area}\,(\Omega\setminus\widetilde{\Omega}_{\delta(k)})=0.\end{aligned} \tag{4}$$

次に, $m(k):=2[1/\delta(k)]$, $n(k):=n_{\delta(k)}$ と定めると, n_δ の定義より, $m(k)\to\infty$ かつ $m(k)/n(k)=1/m(k)\to 0$ となるので

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\sum_{Q\subset\widetilde{\Omega}_{\delta(k)}}\iint_{Q\setminus|I_{m(k)}(Q)|}&|\mu(f_{\delta(k)})-\lambda_{\delta(k)}|\,dx\,dy\\ &\le 2\lim_{k\to\infty}\sum_{Q\subset\widetilde{\Omega}_{\delta(k)}}\mathrm{Area}\,(Q\setminus|I_{m(k)}(Q)|)\\ &\le 2C_6\lim_{k\to\infty}\frac{m(k)}{n(k)}\sum_{Q\subset\widetilde{\Omega}_{\delta(k)}}\mathrm{Area}\,(Q)\\ &\le 2C_6\mathrm{Area}\,(\Omega)\lim_{k\to\infty}\frac{m(k)}{n(k)}=0.\end{aligned} \tag{5}$$

最後に, $\Psi_Q(I_{m(k)}(Q))$ の各頂点 v に対して, $G(T(Q'),v,m(k))=G(H_\delta,v,m(k))$ であるので, v を端点とする任意の二辺の比は $1+s_{m(k)}$ で評価できる. ここに $\{s_m\}_{m=0}^{\infty}$ は 0 に収束する正数列であって, Hexagonal Packing Lemma の主張にある Hexagonal Packing 定数である. そこで f_δ の定義より, 任意の $\varepsilon>0$ に対して k を十分大きくとれば, PL-写像 $f_{\delta(k)}\circ\Psi_Q^{-1}\colon Q'\to\mathbb{D}$ の複素変形率は $\Psi_Q(|I_{m(k)}(Q)|)$ において ε で評価できる. よって $|I_{m(k)}(Q)|$ 上で

$$\begin{aligned}|\mu(f_{\delta(k)})-\lambda_\delta|&=|\mu((f_{\delta(k)}\circ\Psi_Q^{-1})\circ\Psi_Q)-\mu(\Psi_Q)|\\ &\le 2|\mu(f_{\delta(k)}\circ\Psi_Q^{-1})|\le 2\varepsilon\end{aligned}$$

となるから,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{Q\subset\widetilde{\Omega}_{\delta(k)}} \iint_{|I_{m(k)}(Q)|} |\mu(f_{\delta(k)}) - \lambda_{\delta(k)}|\, dx\, dy$$

$$\text{(6)} \qquad \leq 2\varepsilon \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\subset\widetilde{\Omega}_{\delta(k)}} \mathrm{Area}\,(|I_{m(k)}(Q)|)$$

$$\leq 2\varepsilon \mathrm{Area}\,(\Omega).$$

以上 (4), (5), (6) より主張 (3) が導かれる. □

参考文献

[1] Z.-X. He : Solving Beltrami equations by circle packing, Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), 657–670.

[2] O. Lehto and K. I. Virtanen : *Quasiconformal Mappings in the Plane,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1973.

[3] A. Marden and B. Rodin : On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem, Springer Lecture Notes **1435** (1990), 103–115.

[4] Ch. Pommerenke : *Boundary Behaviour of Conformal Maps,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[5] B. Rodin and D. Sullivan : The convergence of circle packings to the Riemann mapping, J. Differential Geom. **26** (1987), 349–360.